Академик
Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

ЛЕКЦИИ ПО ОПТИКЕ, ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1972

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(14.VI 1934 г.)

Краткое ревюме. Основная теорема теории непрерывных групп Ли. Существование аддитивного параметра. Ограничение вида искомого преобразования требованиями групповости и выполнения принципа относительности. Два типа преобразований — лоренцово и поворот осей. Заключение

В прошлый раз мы занимались изучением свойств, принадлежащих лоренцовым преобразованиям, как совокупности. Мы видели, что эта совокупность образует группу и что это естественно получается из требований линейности преобразований и существования у них инварианта.

Мы видели далее, что свойство быть группой физически чрезвычайно существенно, что без этого все построение физики было бы чрезвычайно затруднительным и едва ли могло бы привести к чему-нибудь хорошему. Общее лоренцово преобразование относится к группе, содержащей 10 параметров. Такую группу обозначают обычно так: G_{10}. Однородное лоренцово преобразование является подгруппой этой группы и имеет 6 параметров, т. е. это G_6; наконец, специальное лоренцово преобразование характеризуется одним параметром, т. е. это G_1.

Я предложил вам в качестве примера проверить, что специальное лоренцово преобразование действительно представляет группу. В самом деле, возьмите лоренцово преобразование со скоростью v_1. Соответствующая матрица будет L_{v_1}. Она дает нам переход от нештрихованных координат к штрихованным; затем матрица L_{v_2} дает переход от координат с одним штрихом к координатам с двумя штрихами. Если мы последовательно применим оба преобразования, то получим преобразование нештрихованных координат к координатам с двумя штрихами, имеющее матрицу

$$L_{v_3} = L_{v_2} \cdot L_{v_1}.$$

Нетрудно убедиться, что матрица L_{v_3} построена совершенно так же, как L_{v_1} и L_{v_2}, причем значение параметра в ней есть

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Это не что иное, как эйнштейновская формула сложения скоростей. Так оно и должно было получиться. Мы имели систему K', движущуюся со скоростью v_1 по отношению к системе K, и другую систему K'', движущуюся со скоростью v_2 по отношению к системе K'. Какова скорость системы K'' по отношению к системе K'? По Эйнштейну, если мы сложим эти скорости, то результирующее преобразование должно иметь в качестве параметра написанное значение.

Вопрос, который мы затем поставили, можно формулировать следующим образом. Для того чтобы вывести лоренцово преобразование, мы опирались на несколько предпосылок. Во-первых, мы требовали, чтобы определенная квадратичная форма при переходе от одной системы к другой оставалась инвариантной. Это было главное условие, причем пока мы требовали только постоянства скорости света, то оно давало равенство формы нулю. Когда же мы присоединили и требование относительности, то получили инвариантность. Теперь мы хотим поставить несколько формальный вопрос — обратный. Мы знаем, что переход от одной движущейся системы к другой происходит при помощи линейного преобразования, причем параметром служит скорость. Мы имеем, таким образом, совокупность линейных преобразований и хотим узнать, каковы эти преобразования. Чтобы их определить, нам нужно поставить какие-то требования. Мы не будем говорить о постоянстве скорости света, не будем говорить об инвариантности какой-то формы, но потребуем, чтобы эти преобразования представляли собой группу. Какие ограничения налагает это требование на преобразования? Мы видели, что само по себе оно очень существенно, но еще не определяет вида преобразования однозначно. Посмотрим, какие же требования нужно добавить, чтобы получить вполне определенные — лоренцовы — преобразования. Для решения этого вопроса мы прежде всего должны знать, какие требования нужно предъявить аналитически, если мы хотим, чтобы преобразование было группой.

Пусть наше преобразование задается пока не в виде линейных, а в виде любых функций с одним параметром

$$
\begin{aligned}
x' &= f_1(x,\ y;\ a),\\
y' &= f_2(x,\ y;\ a).
\end{aligned}
\tag{31}
$$

По определению группы, нужно требовать следующего. Перейдем от x', y' к x'', y'' с помощью преобразования

$$
\begin{aligned}
x'' &= f_1(x',\ y';\ b),\\
y'' &= f_2(x',\ y';\ b),
\end{aligned}
$$

принадлежащего к той же совокупности. Мы можем затем подставить x', y' в это второе преобразование и получим x'', y'' как функции от x, y, a, b. Это будут, вообще говоря, какие-то новые функции. Но если окажется, что эти функции можно опять выразить так:

$$
\begin{aligned}
x'' &= f_1(x,\ y;\ c),\\
y'' &= f_2(x,\ y;\ c),
\end{aligned}
$$

причем

$$c = \psi(a,\ b),$$

то, значит, новое преобразование относится к той же совокупности и последняя образует группу.

Я уже говорил в прошлый раз, что указать сразу, какие свойства должны иметь функции f_1 и f_2, трудно. Ли пошел по другому пути. Он говорит: посмотрим на эти функции как на интегралы некоторых дифференциальных уравнений по отношению к a, для которых x, y будут начальными значениями. (Мы предполагаем, что функции дифференцируемы, непрерывны и вообще с ними можно делать то, что нам нужно.) Напишем эти дифференциальные уравнения

$$\frac{dx'}{da} = \psi_1(x', y', a),$$
$$\frac{dy'}{da} = \psi_2(x', y', a), \tag{32}$$

причем при $a = a_0$, $x' = x$, $y' = y$. И вот оказывается, что здесь имеет место одна теорема, являющаяся основной теоремой теории непрерывных групп Ли (я ее формулирую в упрощенном виде — только для двух переменных и для одночленных групп). Эта замечательная теорема очень просто доказывается[1], и гласит следующее: если преобразования (31) образуют группу, то дифференциальные уравнения (32) *имеют вполне определенный вид, а именно:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{da} &= \lambda(a) X(x', y'), \\ \frac{dy'}{da} &= \lambda(a) Y(x', y'). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Это необходимое и достаточное условие, причем функция $\lambda(a)$ в обоих уравнениях одна и та же. Она определена не совсем однозначно в том смысле, что ее можно умножить на произвольное постоянное число, т. е. функция от a определена с точностью до произвольного постоянного множителя. Это несущественно, в общем она все-таки однозначна и для данной группы является вполне определенной функцией a.

Мы примем эту теорему без доказательства и посмотрим, какие следствия можно из нее вывести. А следствия можно вывести довольно интересные. Предположим, что написанные выше преобразования (31) образуют группу. Мы можем заменить a какимнибудь другим параметром, например $\alpha = \alpha(a)$. Это не изменит группы. Если это группа при параметре a, то при α это также будет группой, т. е. в качестве нового параметра можно взять любую функцию старого. В лоренцовых преобразованиях мы считали параметром скорости, но могли бы считать параметром и скорость в квадрате или скорость в квадрате плюс единица. В этом легко убедиться.

Далее мы видели, что произведение двух преобразований группы дает новое преобразование, *соответствующее новому значению* параметра, которое, вообще говоря, не является суммой для первых значений (например, в лоренцовых преобразованиях это не сумма).

---

[1] См., например, *Гурса.* Курс анализа, т. II, ч. II, стр. 94.

Введем теперь новый, более удобный параметр

$$\varphi = \int_{a_0}^{a} \lambda(a)\, da \tag{34}$$

(при $a = a_0$ он равен нулю).

Если мы подставим этот параметр в дифференциальное уравнение (33), то получим

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{d\varphi} &= X(x', y'), \\ \frac{dy'}{d\varphi} &= Y(x', y'), \end{aligned} \tag{35}$$

т. е. при этом параметре уравнения группы должны приобрести такой вид, что в правых частях параметра нет. Это типично для дифференциальных уравнений группы, и это имеет место только при специальном выборе параметра (34). Всегда существует один такой параметр, который приводит дифференциальные уравнения к виду (35). Отсюда получается очень интересное следствие. Дифференциальные уравнения (35) можно интегрировать в том смысле, что можно указать свойства общего интеграла. В более привычной форме эти уравнения записываются так:

$$\frac{dx'}{X} = \frac{dy'}{Y} = d\varphi. \tag{35'}$$

Вы знаете, что первый интеграл таких уравнений есть

$$\Omega_1(x', y') = C_1. \tag{36}$$

Я могу взять далее одно из уравнений (35′), подставить (36), проинтегрировать и, заменяя C_1 опять при помощи выражения (36), получу второй интеграл

$$\Omega_2(x', y') = C_2 + \varphi. \tag{37}$$

Интегрирование всегда приводит к таким выражениям [1].

Я могу теперь выразить C_1 и C_2 при помощи начальных ($\varphi = 0$) значений x и y. В результате я получу следующие интегралы уравнений группы:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1(x', y') &= \Omega_1(x, y), \\ \Omega_2(x', y') &= \Omega_2(x, y) + \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Значит, если есть группа, то при определенном выборе параметра ее дифференциальные уравнения непременно имеют вид (35′).

[1] См. *Гурса*, loc. cit.

Эта форма уравнений называется канонической. Интегралы этих уравнений имеют вид (38).

Обратно, если даны уравнения вида (35′), то интегралы всегда будут группой, т. е. уравнения (35′) всегда представляют группу. Сейчас мы это докажем.

Я хочу перейти от x' к x'' и пишу

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1(x'', y'') &= \Omega_1(x', y'),\\ \Omega_2(x'', y'') &= \Omega_2(x', y') + \varphi_2.\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Произведение этих двух преобразований дает переход от x, y к x'', y''. Подставив (38) в (39), получаем

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1(x'', y'') &= \Omega_1(x, y),\\ \Omega_2(x'', y'') &= \Omega_2(x, y) + \varphi_1 + \varphi_2.\end{aligned}\right\}$$

Таким образом, мы перешли от нештрихованной к дважды штрихованной системе координат и получили такую же совокупность уравнений, но с другим значением параметра. В первом случае у нас был параметр φ_1, во втором φ_2; произведение этих двух преобразований имеет тот же вид, но с параметром

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{40}$$

Этот результат — аддитивность — мы получили сверх всякого ожидания. Мы исходили из того факта, что если наши преобразования образуют группу, то дифференциальные уравнения имеют вполне определенный вид. Из этого вида мы пришли к заключению, что всегда можно ввести такой параметр, при котором последовательное применение двух преобразований соответствует третьему преобразованию, параметр которого есть просто сумма параметров первого и второго преобразований. Оказывается, что так подобрать параметр всегда можно, причем он определяется однозначно, с точностью до численного коэффициента (т. е. если вместо φ мы возьмем $k\varphi$, то получим то же самое).

Всякая одночленная группа может быть при помощи соответствующего подбора параметра приведена к такой форме, в которой параметры просто складываются.

Между прочим, это сразу наводит на следующий вопрос. Мы видели, что когда за параметр лоренцова преобразования мы принимаем скорость, то произведение двух преобразований имеет параметр, который не равен сумме параметров. Мы можем сказать теперь, что есть какой-то один параметр, при котором в произведении двух лоренцовых преобразований мы, наверно, получим простую сумму параметров. Скорость не есть такой параметр, но такой параметр непременно существует. К этому мы обратимся позднее.

Сейчас нас, в сущности, интересует такой вопрос: что можно сказать относительно группы при требовании, чтобы преобразования были линейными и однородными?

Будем вести наши исследования, принимая такой параметр, который просто складывается,— так будет гораздо проще. Потом мы свяжем этот параметр со скоростью и увидим, какие следствия отсюда получаются. Основная теорема была приведена без доказательства. Мы вывели из нее определенные следствия и сейчас применим их к интересующему нас случаю и посмотрим, что из этого следует.

Самый общий вид линейного преобразования с одним параметром (будем пока считать параметром скорость) такой:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a(v)\,x + b(v)\,t, \\ t' &= c(v)\,x + d(v)\,t, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

где a, b, c, d — произвольные функции. Одно только можно сказать сразу же: если мы хотим, чтобы параметр обозначал скорость, то должна иметь место некоторая связь между коэффициентами, а именно $\frac{b(v)}{a(v)} = -v$, которая следует просто из физического смысла скорости.

Еще одно замечание. Из лоренцова преобразования мы заключили, что длина, измеренная в одной системе, иная, чем измеренная в другой. Из всего хода доказательства видно, что отношение длин данного стержня в одной и в другой системе определяется коэффициентом $a(v)$. Таков физический смысл этого коэффициента; заметим это, хотя пока это и неважно.

Мы хотим найти, какую форму должны иметь преобразования (41), чтобы они были группой. Воспользуемся нашим рецептом: продифференцируем уравнения (41) по v и получим дифференциальные уравнения

$$\frac{dx'}{dv} = \alpha(v)\,x' + \beta(v)\,t',$$

$$\frac{dt'}{dv} = \gamma(v)\,x' + \delta(v)\,t'.$$

Если это группа, то дифференциальные уравнения должны иметь вид

$$\frac{dx'}{dv} = \lambda(v)\,(\alpha x' + \beta t),$$

$$\frac{dt'}{dv} = \lambda(v)\,(\gamma x' + \delta t'),$$

т. е. справа могут стоять только такие однородные линейные функции x' и t', в которых α, β, γ, δ — постоянные величины. Введем новый параметр

$$\varphi = \int_0^v \lambda(v)\,dv. \tag{42}$$

Тогда канонические уравнения искомых преобразований должны иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{d\varphi} &= \alpha x' + \beta t', \\ \frac{dt'}{d\varphi} &= \gamma x' + \delta t'. \end{aligned} \tag{43}$$

То, что α, β, γ, δ — постоянные коэффициенты,— это колоссальное ограничение, которое получилось именно из требований, чтобы уравнения представляли группу. Проинтегрировать уравнения (43) ничего не стоит, и мы могли бы прямо в окончательной форме написать линейное однородное преобразование, удовлетворяющее только тому условию, что оно образует группу. И все-таки это будет набор совокупностей, каждой из которых будут отвечать определенные значения α, β, γ, δ. Какие это числа, мы не знаем. Условие группы требует только, чтобы это были постоянные величины. Можно взять числа 1, 2, 3, 4 или 1, —2, —3, —4. Типы преобразований будут существенно различны в зависимости от соотношений между этими коэффициентами и это приводит нас к изучению возможных типов преобразований. Уравнения (43) хорошо известны и подробно продискутированы, и на этом останавливаться мы не будем. Хотя и интересно с точки зрения только условия группы рассмотреть, как выглядят отдельные преобразования в зависимости от различных соотношений между числами α, β, γ, δ, и посмотреть, каким физическим смыслом каждое из них может обладать, но мы пойдем не таким путем. Мы сразу же поставим дальнейшие требования, потому что мы видели, что при выводе лоренцова преобразования мы также не могли удовлетвориться одним только постулатом постоянства скорости света, а требовали еще и относительности. Поэтому мы постараемся и здесь, прежде чем интегрировать уравнения, ввести это требование.

Как выражается требование относительности? Возвратимся к исходным уравнениям (41). Мы можем их обратить и получим тогда

$$x = \frac{dx' + bt'}{ad - bc}, \qquad t = \frac{-cx' + at'}{ad - bc}. \tag{44}$$

Если система K' движется по отношению к системе K со скоростью v, то я должен требовать, чтобы система K двигалась по отношению к системе K' со скоростью $-v$. Это первое требование. Второе требование, которое мы предъявляли и раньше, таково: если я измерил неподвижный в K' масштаб в системе K и он оказался в n раз короче, то и обратно, когда я измеряю из системы K масштаб, который неподвижен в системе K, я должен получить такое же укорочение.

Эти требования налагают на наши коэффициенты довольно большие новые ограничения, а именно: во-первых, скорость, обратная скорости $v = -\frac{b(v)}{a(v)}$, согласно (44), есть $v' = \frac{b(v)}{d(v)}$. Я требую, чтобы $v' = -v$, откуда вытекает, что $a(v) = d(v)$. Кроме того, взаимное укорочение должно быть одинаковым. В (41) оно дается коэффициентом $a(v)$, а в (44) — коэффициентом $\frac{d(v)}{ad - bc}$. Следовательно,

$$a = \frac{d}{ad - bc},$$

а так как $a = d$, то детерминант должен равняться единице. Значит, введение требования относительности дает следующее:

$$\left.\begin{aligned} a(v) &= d(v), \\ ad - bc &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Это довольно большое ограничение, но соответствующие требования мы ставили и раньше. Я бы сказал грубо, что мы заменили теперь условие постоянства скорости света требованием групповости. Благодаря тому, что свойство групповости соблюдено, мы пришли к тому, что уравнения (43) должны иметь постоянные коэффициенты. Для того же, чтобы и принцип относительности был соблюден, необходимо, чтобы коэффициенты интегральных соотношений удовлетворяли условиям (45).

Легко установить, как отзываются требования (45) на коэффициентах α, β, γ, δ. Это можно сделать посредством приема, которым теория групп очень часто пользуется. Я выведу, во всяком случае, необходимое условие, которому должны удовлетворять α, β, γ, δ и которое имеет очень простой вид.

При $\varphi = 0$ $x' = x$ и $t' = t$. Перейдем от $\varphi = 0$ к очень малому $\Delta\varphi$. Мы можем написать тогда

$$x' = x + \left(\frac{dx'}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} \Delta\varphi,$$
$$t' = t + \left(\frac{dt'}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} \Delta\varphi.$$

Это будет, как говорят, бесконечно малое преобразование, т. е. соответствующее бесконечно малым скоростям. Но из (43) мы знаем $\frac{dx'}{d\varphi}$ и $\frac{dt'}{d\varphi}$ при $\varphi = 0$, так как при этом $x' = x$, $t' = t$. Подставив, получим

$$x' = (1 + \alpha\Delta\varphi)\, x + \beta\Delta\varphi t,$$
$$t' = \gamma\Delta\varphi x + (1 + \delta\Delta\varphi)\, t.$$

Мы имеем здесь просто интегрирование в ближайшей окрестности. При любом φ нужно было бы (43) проинтегрировать, но для ближайшей окрестности можно получить преобразование так, как мы это сделали. Требования (45) справедливы при любом φ, а значит, и для $\Delta\varphi$, но, конечно, все здесь должно делаться лишь до первого порядка относительно $\Delta\varphi$. Легко видеть, что если мы хотим удовлетворить двум условиям (45), то необходимо $\alpha = \delta = 0$. Таким образом, дифференциальные уравнения наших преобразований, если прибавить требование относительности, должны быть таковы:

$$\frac{dx'}{d\varphi} = \beta t', \qquad \frac{dt'}{d\varphi} = \gamma x', \tag{46}$$

где β и γ — произвольные постоянные числа. Это уже почти единственное преобразование. В том, что оно все же не единственное,— весь интерес. Теперь остается проинтегрировать эти уравнения и получить уравнения в конечном виде, которые удовлетворяют всем нашим условиям. Но позвольте сделать некоторые замечания.

Все наши сегодняшние рассуждения формальны. То, что мы требовали групповости,— это формальное требование; то, что мы требовали относительности, также сводилось на формальное требование, чтобы некоторые коэффициенты были связаны определенным образом, а отсюда какие-то другие коэффициенты должны были равняться нулю. Физический смысл при этом не учитывался, и все это были формальные математические условия.

Рассмотрим совершенно другую задачу. Возьмем на плоскости координатную систему x, y и перейдем к новой системе x', y'. Пусть угол между осями равен φ. Тогда мы знаем, что

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \tag{47}$$
$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

По отношению к этой задаче я мог бы поставить совершенно такие же вопросы. Я знаю, что уравнения преобразования линейны и однородны, и я потребую, чтобы они были группой (между прочим, на этом строится вся геометрия). Я нарочно выписал эти преобразования. Если вы посмотрите на них, то убедитесь, что два других требования здесь также выполнены. Во-первых, $a = d$ и, во-вторых, детерминант равен единице, так что постулат относительности удовлетворен. Я мог бы, повторяю, решить задачу о преобразовании координат на плоскости, исходя из следующих требований. Преобразования должны быть линейными, однородными, должны представлять группу, а кроме того, $a = d$, и детерминант должен равняться единице. Как геометрия поступает обычно? Линейное преобразование однородно, и требуется, чтобы $x^2 + y^2$ было инвариантом. Отсюда приходят к (47). Но можно поступить и обратно: ничего не говорить об инварианте, а требовать групповости. Легко показать, что это означает геометрически. Это совершенно то же самое, что наше требование взаимности сокращения масштаба в штрихованных и нештрихованных координатах.

Пока что у нас другая задача, но если я указанным образом поставлю вопрос о разыскании преобразований, то я предъявлю те же самые требования, что и в задаче о преобразовании от одной движущейся системы к другой. Совершенно естественно, что по отношению к дифференциальным уравнениям ответ должен быть тем же самым, т. е. и для поворота координат на плоскости дифференциальные уравнения преобразования должны быть такими же. Таким образом, наши требования пока что не делают различия между этими двумя физически совершенно разными задачами. Одна — преобразование координат, движущихся друг относительно друга систем отсчета, а другая — поворот осей на плоскости, т. е. преобразование двух пространственных координат. И вот интересно, что наши требования действительно содержат ответ как на первый, так и на второй вопрос, т. е. содержат оба эти случая, но никаких других случаев не содержат. Потом мы выясним, как провести различие между этими двумя случаями, но сейчас вы видите, насколько они близки. Вот почему при лоренцовых преобразованиях говорят о геометризации. Действительно, задача, поскольку она ставится абстрактно математически, та же самая, но только математически. Физически мы толкуем x, y и t совершенно различно: в первом случае x и y — пространственные координаты на плоскости, во втором случае x — пространственная координата, а t — время, которое совершенно иначе измеряется и определяется. Ясно, что должно быть и какое-то формальное различие, и мы увидим сейчас, что оно действительно имеется.

В чем оно заключается? Я сказал, что β и γ — произвольные постоянные. И вот оказывается существенным, имеют ли они одинаковые знаки или различные. Рассмотрим первый случай — β и γ имеют одинаковые знаки — и в этом предположении проинтегрируем наши совсем простые уравнения. Заметим, что $\sqrt{\beta\gamma}$ действителен, так как под корнем стоит положительная величина. β и γ определены с точностью до постоянного коэффициента, и мы можем поэтому считать, что $\sqrt{\beta\gamma} = 1$. Обозначим далее $\sqrt{\gamma/\beta} = \rho$. Мы получаем тогда из (46) следующие окончательные выражения:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}\,x - \rho\,\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}\,t, \\ t' &= -\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2\rho}\,x + \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}\,t. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Мы убедимся, что это лоренцово преобразование.

Параллельно рассмотрим второй случай, когда $\beta\gamma < 0$, т. е. когда β и γ имеют разные знаки. Мы всегда можем умножить их на такую величину, чтобы получать $\sqrt{\beta\gamma} = i$. Далее, обозначим $\sqrt{\gamma/\beta} = -i\rho$. Если проинтегрировать уравнения (46) при этих условиях, то мы получим

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\,x - \rho\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\,t, \\ t' &= \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2\rho i}\,x + \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\,t. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Я пока не знаю, какие уравнения отвечают моему случаю. Я утверждаю, что первые есть лоренцово преобразование, а вторые — самое обычное преобразование координатной системы. Но пока я не знаю ни лоренцовых преобразований, ни этих, и я спрашиваю: можно ли именно из физических соображений, из того, что определение времени иное, чем определение второй координаты в пространстве, сказать с самого начала, какие уравнения отвечают одному случаю и какие другому? Я утверждаю, что можно, и притом различными способами. Я это сделаю только одним способом.

Возьмем уравнения (48). Форма этих уравнений, которую мы получили из требования групповости, сразу говорит о том, что существует инвариант. Возведите первое и второе уравнения в квадрат, умножьте второе на ρ^2 и вычтите из первого. Вы получите тогда

$$x'^2 - \rho^2 t'^2 = x^2 - \rho^2 t^2,$$

т. е. это выражение является инвариантом. Аналогично во втором случае инвариантом является

$$x'^2 + \rho^2 t'^2 = x^2 + \rho^2 t^2,$$

причем оба раза ρ — действительная величина. Итак, уравнения, которые получились из наших требований, говорят, что в обоих случаях существует инвариант, но в первом случае — один, во втором — другой.

Отсюда я сразу могу сказать, какой случай относится к движению, а какой к преобразованию координат. По определению времени и движения, я могу сказать следующее: если у вас есть неподвижная точка в какой-то координатной системе и если эта система движется, то с ростом времени координата, отсчитанная в неподвижной системе, несомненно будет возрастать. Это содержится в самих наших понятиях о времени и о движении. Значит, если существует инвариант между x и t, то он может быть только таким, что при росте t должно расти и x. Если же t и x растут и при этом какое-то выражение остается инвариантным, то это может быть только выражение со знаком минус. В пространстве наоборот — поворот осей не изменяет расстояния между двумя точками. Если x растет до бесконечности или t растет, то вся величина растет. Но при изменении координатной системы требования, чтобы x и t увеличивались, нет.

Таким образом, из тех требований, которые мы предъявляем ко времени и движению, ясно, что для нашего случая инвариантным может быть только первое выражение, т. е. мы однозначно выделили теперь преобразование, которое нас интересует.

В этом «небольшом» различии в знаке кроется сущность различия между пространственной координатой во втором случае и временем, как другой «координатой», в первом случае.

Нам осталось показать, что (49) действительно есть не что иное, как обычное преобразование. Легко видеть, что уравнения (49) можно переписать в виде

$$x' = x \cos\varphi - \rho t \sin\varphi,$$

$$t' = -x\frac{\sin\varphi}{\rho} + t\cos\varphi,$$

а это обычная форма преобразования, за исключением произвольной величины ρ. Но ее присутствие понятно. Мы ведь не требовали, чтобы масштаб для x и y был одинаков. При этом добавочном требовании мы получим обычные формулы преобразования координат.

Наоборот, такая форма совершенно непривычна для нас в лоренцовом преобразовании. Случайна ли эта форма или не случайна? Я уже указал, что параметр φ — это специально подобранный параметр, который обладает тем свойством, что умножению двух преобразований соответствует сложение их параметров. Так уж повелось, что при преобразовании осей за параметр принимается угол φ, и когда вы поворачиваете оси сначала на угол φ_1, а затем на угол φ_2, то окончательный поворот будет на угол $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$. Но можно было бы выбрать в качестве параметра для поворота осей не φ, а, скажем, $\operatorname{tg} \varphi$. Пусть $\operatorname{tg} \varphi = v$. Если подставить этот параметр, то получится лоренцово преобразование. Действительно, $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$, а значит, $v_3 = \operatorname{tg}\varphi_3 = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)$, т. е.

$$v_3 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 - v_1 v_2}.$$

Но это как раз лоренцово преобразование для скоростей. Таким образом, если бы поворот характеризовался не самим углом, а его тангенсом, то мы получили бы лоренцовы преобразования. Мы можем и движение одной системы по отношению к другой характеризовать не скоростью v, а величиной φ. Тогда мы получим аддитивность сложения этих новых «скоростей». Такое φ в качестве физического параметра вместо скорости именно с этой точки зрения было введено Робом. Роб говорит следующее: мы можем охарактеризовать движение одного тела по отношению к другому скоростью. Что такое скорость? Мы знаем, что тело может двигаться скорее или медленнее. В качестве меры мы избрали отношение пути ко времени и приняли эту величину в качестве параметра. Ничто не мешает нам выбрать другую характеристику движения. Позвольте не останавливаться на этом подробно, но можно было бы физически сделать так. Представьте себе, что в некоторой системе отсчета мы стреляем из пушки; ядро будет двигаться, и это движение мы примем за меру скорости. Скорость какого-то другого заданного движения мы можем определить таким образом: мы выстрелили из первой пушки; вторую, совершенно такую же пушку мы заставляем двигаться так, чтобы она шла вместе с ядром первой, и в это же время стреляем из второй пушки. Тогда ее ядро будет как-то двигаться. И вот, по определению, мы скажем, что это второе ядро имеет быстроту, вдвое большую, чем первое. Если мы так определим, то это и будет наш аддитивный параметр. Мы можем назвать его *быстротой*. (Роб назвал его rapidity). Это был бы очень ценный параметр именно в силу своей аддитивности.

Теперь позвольте показать, что (48) действительно лоренцово преобразование. В нем стоят не круговые, а гиперболические функции φ, т. е. его можно записать так:

$$x' = \operatorname{ch}\varphi\, x - \rho \operatorname{sh}\varphi\, t,$$

$$t' = -\frac{\operatorname{sh}\varphi}{\rho}\, x + \operatorname{ch}\varphi(t).$$

Если мы обозначим $\rho \operatorname{th} \varphi = v$ (а мы обязаны так сделать, если хотим обычным образом определить скорость v как путь, деленный на время), то уравнения примут такой вид:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\rho^2}}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{\rho^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\rho^2}}}, \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

а это и есть наше обычное лоренцово преобразование. Единственное, чего наши требования не определяют,— это величины ρ. Для этого нужны физические соображения, нужен какой-то физический процесс. Принцип относительности утверждает, что ρ — скорость света в вакууме.

Итак, мы видим, что могут дать наши требования и чего не могут. С одной стороны, они указали нам тип преобразований, но еще оставили большой произвол. Затем мы потребовали, чтобы одна из координат сообразовалась с нашим понятием времени, и мы нашли тогда лоренцово преобразование, но не нашли значения ρ. Это и понятно: из соображений группы численная величина получиться не могла. Для этого нужен опыт.

Можно было бы поступить несколько иначе: сразу ввести требование относительности, т. е. наложить условия (45) и затем ввести требование групповости. Это было сделано Франком. Предположение, что скорость одной системы по отношению к другой обратна скорости второй по отношению к первой и что имеет место одинаковое взаимное сокращение масштаба, достаточно, чтобы привести преобразование к форме (50). Но тогда зачем нужно требование групповости? Я сказал, что преобразования приводятся к форме (50), но с одной разницей: ρ остается произвольной функцией от скорости v. Требование групповости приводит к тому, что ρ — постоянная величина, а это является решающим.

Вы видите, таким образом, как различные требования, одни из которых кажутся большими, другие маленькими, налагают известные ограничения и как отсюда получаются определенные соотношения. Кроме того, указать на групповой характер преобразований важно, как мне кажется, и потому, что становится ясным значение φ. В книгах часто пишут так, что просто сближают преобразование координат на плоскости и лоренцово преобразование. Мне кажется, что если рассматривать с указанной точки зрения, то все получает несколько другой аспект. Замечу еще, что если вместо x написать x_1, а вместо ict взять x_4 (причем то, что я ввожу, не имеет никакого ни мистического, ни физического значения, а просто вводится мнимая координата), то для этих координат лоренцово преобразование приобретает совершенно такой же вид, как для обычного поворота осей, но только φ — мнимый угол. Опять-таки это ничего не значит физически, это только способ обозначения. Часто говорят поэтому, что лоренцово преобразование есть поворот осей, но на мнимый угол.

Гораздо сложнее применить групповые соображение к общим лоренцовым преобразованиям G_6 и G_{10}. Я не буду на этом останавливаться. Укажу только, что и в обычной геометрии все, что можно отсюда вывести, представляет собой чрезвычайно занимательные и фундаментальные вещи. Теперь этот круг вопросов очень хорошо разработан, а начало его было положено знаменитым мемуаром «О происхождении геометрических аксиом» Гельмгольца, который ко всем наукам подходил как естествоиспытатель. Хотя Гельмгольц и сделал довольно грубую логическую ошибку, исправленную потом Ли, но, несмотря на это, творцом всей постановки вопроса нужно считать именно его.

Можно было бы еще много говорить об этом, но нужно закончить. Позвольте в заключение сказать еще несколько слов.

Я особенно старался подчеркнуть (я думаю, что это мое желание и самое мое мнение вы ясно усвоили), что все вопросы, связанные с теорией относительности,— прежде всего вопросы физические. Ее философское значение — это особый вопрос, нас же интересовало физическое значение. Это важно подчеркнуть вот почему: физическая теория оперирует некоторыми определениями, но такими определениями, в основе которых лежат действительно выполнимые физические процессы в реальной природе. Если я говорю, что я измеряю длину, то я требую, чтобы измерение производилось не при помощи каких-то мифических тел, а с тем или иным приближением при помощи физических тел, чтобы можно было указать, *как* это сделать. Если я говорю о времени, о синхронности часов здесь и там, то я требую, чтобы указали, как это установить. *В зависимости от того, что́ показывает эксперимент, и наши требования и наши определения должны быть различны.* Если мы уверены, если все опыты говорят, что в природе не существует сигнальных скоростей, бо́льших скорости света, то, определяя, скажем, одновременность, синхронизм двух часов в различных местах, мы должны с этим считаться. Мы не можем говорить, что определим одновременность, пустив мгновенный сигнал. Мы должны считаться с тем, что есть, и если такого сигнала не существует, то нельзя его ставить в основу теории. Если это так и если признать опыты, с которыми мы соглашаемся, если признать опыт Майкельсона правильным, то те предпосылки, из которых исходит теория относительности, ни в коей мере не являются более искусственными, чем те, из которых исходила классика. Классика тоже должна была опираться на предположения и гипотезы. Классика также должна была определять скорость и устанавливать синхронизм часов здесь и в другом месте. А тогда я могу от представителя классической физики требовать: скажи, как ты устанавливаешь синхронизм?

Если он говорит, что посылает сигнал с бесконечной скоростью, то я это отвергаю, потому что физика должна считаться с тем, что есть в природе. Он может сказать иначе: я переношу часы в другое место и считаю, что они синхронны. Тогда вопрос касается факта: как ведут себя часы, которые таким образом переносят? Релятивист говорит, что они ведут себя так-то, классик говорит, что так-то. Никакой принципиальной разницы в постановке вопроса нет. Все существующие опытные данные говорят, что правы те, кто придерживается теории относительности. Я подчеркиваю еще раз, что не априорные соображения заставляют принять эту теорию, а то, что она более естественна, чем классика, что она оперирует определенными реальными экспериментами. Если эти опыты неправильны, то и теория относительности неправильна, но исходить надо из определенных опытов. Если исходить из тех опытов, о которых мы говорили, то теория относительности не искусственна, а естественна. В ней нет какой-то надстройки над классикой, в которой будто бы все было «само собой очевидно». Если говорить о надстройках, то классика также должна была их делать, но только другие. Кто прав,— это вопрос опыта, и то, что теперь известно, говорит за теорию относительности. Один из главных аргументов — вопрос о скорости света. Признание скорости света в вакууме предельной ведет к таким последствиям, от которых физику отмахнуться нельзя.

К таким же заключениям приводят mutatis mutandis и вопросы квантовой механики. И там вопрос заключается в опыте. С теорией относительности было так, что пока имели дело с маленькими скоростями, никаких отклонений от классики не замечали. Пересмотреть всю систему заставили новые *факты*, теория относительности возникла именно отсюда, а не «откуда-то вдруг взялась». Нечто подобное (я не говорю — то же самое, потому что боюсь таких аналогий) получилось и в квантовой механике. Пока дело касалось макрокосмоса, где влияние на наблюдаемый предмет либо мало, либо может быть учтено, создавалось впечатление, что всегда и везде будет обязательно так. Но если признать опыты, и в первую очередь опыт Комптона, правильными, если признать, что имеется неустранимое взаимодействие, то подобное убеждение рушится. Квантовая механика не произвольное построение. Такого построения требует физика, и если его не сделать, то получится противоречие с опытными фактами. Конечно, всегда можно возразить две вещи: либо опыт неверен, либо можно построить еще третьим способом. Это верно, но не нужно забывать, что и прежнее построение содержало предположения. В этом отношении разницы для физика нет — и раньше должны были делать предположения и теперь, какие предположения правильны, показывает опыт.

Нас интересовали другие вопросы, квантовая механика к ним не относится, но, заканчивая, я хотел подчеркнуть эту сторону дела. Я уверен, что каждый из вас, если не будет останавливаться на полдороге и думать, что теория относительности переворачивает его понятия, а будет трезво относиться к опыту и ко всем построениям, имея в виду, что переворачиванием понятий часто называется разрушение предрассудков, не встретит никаких трудностей, за исключением, быть может, конкретных трудных вопросов.