12. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ БЕЗ ПОСТУЛАТА О ПОСТОЯНСТВЕ СКОРОСТИ СВЕТА

Н. Д. Мермин*

Перевод статьи: *Mermin N. D.* — Amer. J. Phys., February 1984, v. 52, № 2, p. 119.

Релятивистский закон сложения параллельных скоростей выводится непосредственно из принципа относительности, дополненного несколькими простыми предположениями о гладкости и симметрии. При этом вовсе не используется принцип постоянства скорости света.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оригинальная формулировка специальной теории относительности [1] была тесно связана с несомненно верным утверждением о том, что скорость света в вакууме всегда имеет значение c независимо от выбора системы отсчета. Благодаря этому историческому обстоятельству свету почти всегда отводилось центральное место в теории относительности. Например, он играет важную роль при установлении соглашения о синхронизации отдаленных часов, при определении хода движущихся часов или измерении длины движущегося жесткого стержня.

В то же время теория относительности отнюдь не является ветвью электромагнетизма, и этот предмет может быть сформулирован без каких-либо ссылок на свет. Поскольку такой подход не является общепринятым, я должен подчеркнуть следующее. Утверждая, что можно построить теорию относительности без постулата о постоянстве скорости света, я не имею в виду ту тривиальную ситуацию, когда свет можно заменить чем-то иным, что также движется с инвариантной скоростью c. Я не имею в виду также и то, что можно построить теорию, исходя из того факта, что отношение светоподобных промежутков между парой событий должно быть инвариантно относительно выбора системы отсчета независимо от того, существует ли какая-либо форма материи или энергии, которая на самом деле может распространяться с такой инвариантной скоростью.

* *N. D. Mermin*, Laboratory of Atomic and Solid State Physics, Cornell University, Ithaca, New York 14853.

В действительности в мои намерения входит показать, и это будет сделано ниже, что закон сложения параллельных скоростей вида

$$w = (u+v)/(1+Kuv) \qquad (1.1)$$

(где K — универсальная неотрицательная постоянная) является наиболее общим возможным соотношением, совместимым с принципом относительности, дополненным лишь естественными предположениями об однородности, изотропии и гладкости [2]. Из (1.1), разумеется, следует, что $K^{-1/2}$ — это инвариантная скорость. Таким образом, второй постулат Эйнштейна представляет собой следствие его первого постулата [3], если он сформулирован в общем виде и утверждает факт существования инвариантной скорости, а не в более специфической форме, касающейся поведения света [4].

С этой точки зрения эксперименты, устанавливающие постоянство скорости света, играют важную роль лишь постольку, поскольку в них определяется численное значение параметра K. Однако из-за того, что это значение оказалось равным обратному квадрату скорости света в пустом пространстве, а не ожидавшемуся из галилеевских преобразований значению $K=0$, результаты таких экспериментов имели революционизирующее значение и свет стал существенным атрибутом новой теории пространства и времени. Тем не менее значение K можно определить и из тщательных измерений скорости любого движущегося объекта в двух инерциальных системах отсчета, находящихся в состоянии относительного движения [5]. Измерения, связанные со светом, представляют собой наиболее изящный и точный способ определения параметра K, содержащегося в законе сложения (1.1), однако сам по себе этот закон, как будет показано ниже, следует из принципа относительности и фундаментального соотношения между расстоянием, временем и скоростью и не нуждается для своего обоснования в каких-либо дополнительных фактах или постулатах.

Имеются преимущества как педагогического, так и концептуального характера в том, чтобы лишить свет его центральной роли в релятивистской теории. Начав только с принципа относительности и избегая попыток найти связь событий, происходящих в различных системах отсчета, мы приходим прямо к соотношению (1.1), которое играет важную роль в специальной теории относительности. При этом удается избежать неприятного ощущения наличия парадоксов, преследующих с первых шагов более общепринятые способы рассмотрения. За это приходится платить несколько более высоким уровнем математического аппарата, а именно приходится применять элементарные начала математического анализа. Поэтому предлагаемый подход вряд ли доступен для изучающих общий курс физики, однако, как я полагаю, его можно рекомендовать в качестве введения в курс специальной теории относительности для старшекурсников физических специальностей.

В последующем изложении без критического анализа будут использованы понятие инерциальной системы отсчета и в пределах любой данной инерциальной системы отсчета понятия расстояния, времени и скорости. Я буду использовать три последних понятия лишь в той связи, что расстояние, проходимое равномерно и прямолинейно движущимся объектом за данное время, равно произведению его скорости на это время; эта связь, несомненно, должна сохраниться при любом более строгом изложении. Логическая строгость моих рассуждений будет полностью негативной: я буду скрупулезно избегать каких-либо предположений о том, как связаны расстояния, временные промежутки и скорости, измеренные в различных инерциальных системах отсчета. Вполне возможно, что этим вопросам следовало бы уделить большее внимание при более систематическом и экономном изложении основных концепций, однако, встав на этот путь, мы отвлеклись бы от центральной задачи: показать, что нет необходимости постулировать факт существования инвариантной скорости в качестве неизбежного допущения.

Предлагаемый вывод закона сложения (1.1) из принципа относительности сочетает использование мысленного эксперимента и математического анализа. Мысленный эксперимент не отличается особой новизной, за исключением того, что в нем вообще не возникают световые сигналы или частицы (фотоны), движущиеся со специальной инвариантной скоростью. Математический анализ становится, однако, менее стандартным и более усложненным; без второго постулата работать труднее.

В разд. II представлены те методы анализа, которые имеют общий характер, независимый от какого-либо мысленного эксперимента, и позволяют свести задачу о нахождении некоторой функции от двух переменных, через которую выражается общий закон сложения скоростей, к задаче отыскания функции, зависящей лишь от одной переменной. При этом мысленный эксперимент предназначен для того, чтобы определить эту неизвестную функцию.

Два таких мысленных эксперимента описываются в разд. III и IV, причем хотя каждый из них и имеет свою специфику, оба они разными путями приводят к одному и тому же результату (1.1). Конечно, нет никакой логической необходимости в том, чтобы приводить два независимых доказательства. Тем не менее я счел возможным сделать это, поскольку первое из них представляет собой непосредственное обобщение выдвинутого ранее доказательства [6], которое весьма просто приводит к закону сложения исходя из первых принципов, *включающих* в себя принцип постоянства скорости света. Второе доказательство, по-видимому, обеспечивает более подходящую исходную позицию для построения рассуждений в строгой логической последовательности, поскольку оно касается связи между периодическими процессами в различных системах отсчета и поэтому включает непосредственный и глубокий анализ тех аспектов явлений, которые окружены столь обманчивой простотой в общем понятии времени.

Доказательства, представленные в разд. III и IV, доведены до такой степени, что могут быть завершены единым обсуждением результатов, которое проводится в разд. V.

II. ОБЩАЯ ФОРМА ЗАКОНА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Рассмотрим различные объекты и системы отсчета, которые движутся равномерно и прямолинейно вдоль единого общего направления. Закон сложения представляет собой соотношение вида

$$w = f(u,\ v) \tag{2.1}$$

между скоростью w объекта в системе отсчета A, его скоростью u в системе B и скоростью v системы B относительно системы A.

Скорость равномерно и прямолинейно движущегося объекта можно идентифицировать со скоростью его собственной системы отсчета C и записать соотношение (2.1) в более симметричном виде как соотношение между относительными скоростями разных систем отсчета:

$$v_{CA} = f(v_{CB},\ v_{BA}). \tag{2.2}$$

Здесь неявно учтен принцип относительности, вследствие которого f зависит лишь от относительных скоростей v_{CB} и v_{BA}.

При отсутствии каких-либо различий между обоими направлениями движения три скорости, связанные соотношением (2.2), будут по-прежнему удовлетворять (2.2), если все три знака изменятся, так что f должна быть нечетной функцией:

$$f(-x,\ -y) = -f(x,\ y). \tag{2.3}$$

Из этого же требования симметрии следует, что

$$v_{XY} = -v_{YX}. \tag{2.4}$$

Поменяв в (2.2) A и C местами и учитывая два последних соотношения, находим, что

$$f(v_{AB},\ v_{BC}) = v_{AC} = -v_{CA} = -f(v_{CB},\ v_{BA}) = \\ = f(-v_{CB},\ -v_{BA}) = f(v_{BC},\ v_{AB}), \tag{2.5}$$

т. е. f должна быть симметричной функцией своих аргументов:

$$f(x,\ y) = f(y,\ x). \tag{2.6}$$

Еще одно важное свойство функции f можно установить, если ввести в рассмотрение четвертую систему отсчета D и заметить, что v_{DA} можно записать двумя различными способами:

$$f(v_{DB},\ v_{BA}) = v_{DA} = f(v_{DC},\ v_{CA}). \tag{2.7}$$

Раскрыв выражение для v_{DB} слева и для v_{CA} справа:

$$v_{DB} = f(v_{DC},\ v_{CB}),\ v_{CA} = f(v_{CB},\ v_{BA}), \tag{2.8}$$

найдем общее свойство f:

$$f(f(x,\ y),\ z) = f(x,\ f(y,\ z)). \tag{2.9}$$

Все приведенные выше соотношения вытекают из простых свойств симметрии. Теперь допустим, что искомый закон сложения описывается *гладкой* функцией f. Однако если f непрерывна и дифференцируема, то она может быть выражена через функцию, зависящую лишь от одной переменной.

Действительно, определим

$$f_2(x,\ y) = \partial f(x,\ y)/\partial y. \tag{2.10}$$

Тогда дифференцирование выражения (2.9) по z дает

$$f_2(f(x,\ y),\ z) = f_2(x,\ f(y,\ z)) f_2(y,\ z). \tag{2.11}$$

Положив в этом выражении $z=0$, получим

$$f_2(f(x,\ y),\ 0) = f_2(x,\ y) f_2(y,\ 0); \tag{2.12}$$

здесь использован очевидный из исходного определения f факт, что

$$f(y,\ 0) = y. \tag{2.13}$$

Зафиксируем теперь x и будем рассматривать $f(x,\ y)$ как функцию одной переменной y, параметрически зависящую от x. Будем считать, что $f_2(y,\ 0)$ — другая функция от y. Тогда соотношение (2.12) может быть представлено в виде обыкновенного дифференциального уравнения:

$$f_2(f,\ 0) = (df/dy) f_2(y,\ 0), \tag{2.14}$$

или

$$dy/f_2(y,\ 0)=df/f_2(f,\ 0). \qquad (2.15)$$

Определим новую функцию $h(z)$:

$$h(z)=\int dz/f_2(z,\ 0); \qquad (2.16)$$

тогда решение уравнения (2.15) имеет вид

$$h(f)=h(y)+\mathrm{const}, \qquad (2.17)$$

где константа не является функцией от y, но может зависеть от x как от параметра. Теперь условие симметрии (2.6) требует, чтобы константа в точности равнялась $h(x)$ (плюс истинная постоянная, которая может быть включена в определение функции h [7]). Отсюда мы приходим к выводу, что должна существовать такая функция h от одного переменного, что

$$h(f(x,\ y))=h(x)+h(y); \qquad (2.18)$$

тогда закон сложения можно записать в следующем функциональном виде:

$$f(x,\ y)=h^{-1}(h(x)+h(y)). \qquad (2.19)$$

Таким образом, для нахождения закона сложения достаточно определить функцию h. Для этой цели достаточно знать функцию $f(x,\ y)$ лишь в окрестности точки $y=0$, поскольку из (2.16) следует, что

$$h'(z)=\frac{1}{\partial f(z,\ y)/\partial y}\bigg|_{y=0}. \qquad (2.20)$$

Условие (2.13) согласуется с (2.18), только если

$$h(0)=0. \qquad (2.21)$$

Это равенство является граничным условием, необходимым для определения h из (2.20) путем интегрирования.

Теперь обратимся к некоторым мысленным экспериментам, которые позволяют нам установить вид функции $h(z)$, оставив неопределенной лишь единственную универсальную постоянную K.

III. ТОЧНАЯ ФОРМА ЗАКОНА СЛОЖЕНИЯ: МЫСЛЕННОЕ «СОСТЯЗАНИЕ В БЕГЕ»

Понаблюдаем за состязанием в беге между черепахой и зайцем внутри длинного прямого поезда (рис. 1), которые стартуют в конце поезда и устремляются к его началу. Заяц попадает туда первым, разворачивается и бежит назад, встречая по пути черепаху, все еще продолжающую свое движение вперед [8]. Пусть в системе отсчета поезда скорость черепахи равна u, а скорость зайца (в любом направлении) равна s.

Расстояние от начала поезда, на котором вновь

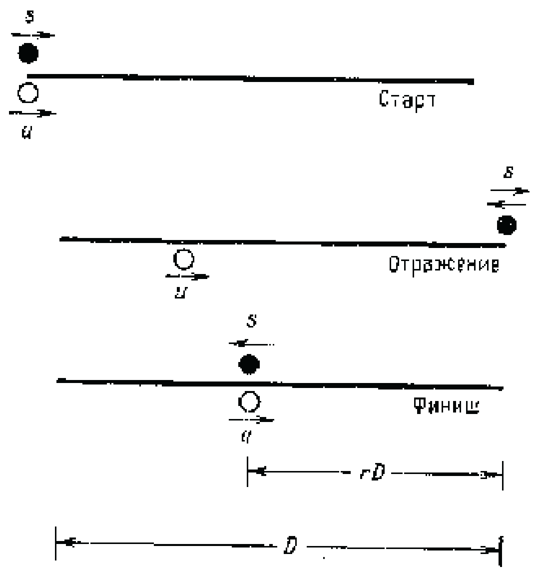

Рис. 1. Состязание в беге между зайцем (черный шарик) и черепахой (белый шарик), наблюдаемое в системе отсчета поезда. Скорость зайца (в обоих направлениях) равна s, а скорость черепахи u. Расстояние между передним (правым) концом поезда и окончательным местом встречи зайца и черепахи составляет некоторую долю r полной длины поезда D.

происходит их встреча, составляет некоторую долю r его полной длины. Эта доля является инвариантом, не зависящим от выбора системы отсчета, поскольку не может быть разногласий по поводу того, в каком именно месте в поезде произошла встреча. (Например, они могут встретиться в 73-м вагоне от начала поезда, состоящего из 100 одинаковых вагонов, что соответствует значению $r=0{,}73$. Лишь пассажиры 73-го вагона смогли бы засвидетельствовать факт встречи, и это свидетельство было бы признано наблюдателями в любой системе отсчета, даже если бы у них были совершенно различные представления о длине вагонов.)

Вычислим теперь r в системе отсчета («v-система»), в которой поезд движется со скоростью v (рис. 2), и изучим следствия того, что r не может зависеть от v. Достаточно будет рассмотреть случай, когда v меньше u, так что направление движения зайца на обратном пути можно считать противоположным направлению движения поезда в v-системе. Пусть скорость черепахи в v-системе равна w, а скорости движения зайца на его пути вперед и обратно после поворота равны соответственно s_1 и s_2 в v-системе. Эти скорости связаны со скоростью системы отсчета поезда следующим законом сложения:

$$w=f(u,v),\qquad s_1=f(s,v),\qquad s_2=f(s,-v). \tag{3.1}$$

[Последнее равенство следует из того, что после поворота *скорости* зайца в двух системах равны $-s$ и $-s_2$, так что благодаря нечетности функции f имеем $-s_2=$ $=f(-s,v)=-f(s,-v)$.]

Пусть T — время (в v-системе), за которое заяц добирается из конца поезда до его начала, а T' — время, которое прошло с момента поворота зайца до встречи с черепахой. Обозначим через L длину поезда в v-системе. Нам не известны значения T, T' и L, однако это не важно, поскольку эти величины не войдут в окончательный результат. Для того чтобы выразить величину r полностью через скорости w, s_1, s_2 и v, необходимо заметить лишь следующее:

1. Полное расстояние, которое проходит черепаха от старта до встречи с зайцем, равно $w(T+T')$. Это же расстояние равно пути s_1T, проходимому зайцем

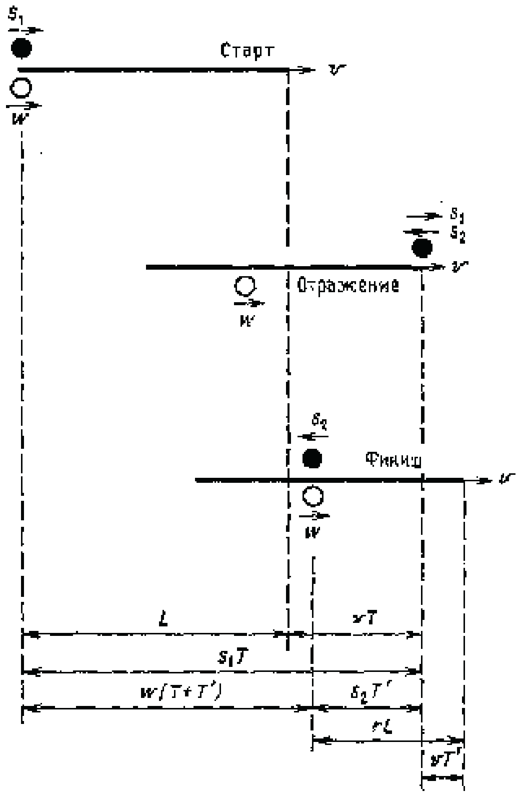

Рис. 2. Состязание в беге между зайцем (черный шарик) и черепахой (белый шарик), наблюдаемое в v-системе, относительно которой поезд движется вправо со скоростью v. Скорость зайца равна s_1 при движении вправо и s_2 при движении влево, скорость черепахи w. Длина поезда равна L. Время между стартом и началом обратного движения равно T, а между началом обратного движения и финишем оно равно T'. Указаны различные расстояния, входящие в уравнения (3.2)—(3.4).

при движении от старта до начала поезда, из которого вычтено расстояние s_2T', покрытое зайцем от начала поезда до места встречи с черепахой:

$$w(T+T')=s_1T-s_2T'. \tag{3.2}$$

2. Расстояние, на которое перемещается заяц при *движении из* конца поезда к его началу, равно длине поезда, увеличенной на расстояние, проходимое поездом за время этого движения, т. е.

$$s_1T = L + vT. \tag{3.3}$$

3. Расстояние, проходимое зайцем от начала поезда до встречи с черепахой, равно длине части поезда rL от начала до места встречи, уменьшенной на путь, пройденный поездом за время движения зайца до этой встречи:

$$s_2T' = rL - vT'. \tag{3.4}$$

Определяя T и T' из (3.3) и (3.4), подставляя полученные выражения в (3.2) и сокращая общий для всех членов множитель L, из найденного уравнения находим следующее выражение для r [9]:

$$r = (s_1 - w)(s_2 + v)/(s_2 + w)(s_1 - v). \tag{3.5}$$

Следует заметить, что при выводе выражения (3.5) мы не пользовались какими-либо релятивистскими понятиями, все вычисления проводились в одной системе отсчета (в v-системе). Информация об относительности учитывалась лишь в том, что мы не предпринимали каких-либо попыток наивно связать скорости в v-системе, появляющиеся в (3.5), со скоростями s и u в системе отсчета поезда, а также намеренно исключили в конечном выражении какие-либо масштабы длины или времени в v-системе.

Чтобы найти закон сложения, необходимо вычислить функцию h, входящую в (2.19). Сравнивая (3.1) с выражением (2.20) для h, получаем

$$\partial s_1/\partial v|_{v=0} = 1/h'(s),$$
$$\partial s_2/\partial v|_{v=0} = -1/h'(s), \tag{3.6}$$
$$\partial w/\partial v|_{v=0} = 1/h'(u).$$

Кроме того, при $v \to 0$ мы имеем

$$s_1 \to s, \quad s_2 \to s, \quad w \to u. \tag{3.7}$$

Поскольку r не зависит от v, производная $\partial \ln(r)/\partial v$ обращается в нуль. Однако, учитывая (3.6) и (3.7), с помощью (3.5) мы можем вычислить эту величину при $v=0$:

$$\left.\frac{\partial \ln(r)}{\partial v}\right|_{v=0} = \frac{2su^2}{s^2 - u^2}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{h'(s)} - 1\right) - \frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{h'(u)} - 1\right)\right]. \tag{3.8}$$

Для того чтобы выражение (3.8) обращалось в нуль, необходимо выполнение следующего равенства:

$$(1/s^2)[1 - 1/h'(s)] = (1/u^2)[1 - 1/h'(u)]. \tag{3.9}$$

Поскольку левая часть этого равенства зависит лишь от s, а правая только от u, каждое из этих выражений должно быть равным одной и той же постоянной K, не зависящей от s и u, так что окончательно имеем

$$h'(u) = 1/(1 - Ku^2). \tag{3.10}$$

Интегрирование этого выражения приводит непосредственно к закону сложения (3.1). Результаты такого интегрирования мы рассмотрим в разд. V, а в разд. IV дадим несколько иной способ получения выражения (3.10).

IV. ТОЧНАЯ ФОРМА ЗАКОНА СЛОЖЕНИЯ: «МЫСЛЕННЫЙ» ОСЦИЛЛЯТОР

Рассмотрим мяч, катающийся вперед и назад между концом и началом поезда с постоянной скоростью u в системе отсчета поезда. Изучим такой «u-осциллятор» в системе отсчета (в v-системе), относительно которой поезд движется со скоростью v, меньшей, чем u. Пусть $t_1(u, v)$ и $t_2(u, v)$ — промежутки времени в v-системе, за которые совершаются части каждого цикла, отвечающие движению соответственно из конца в начало и от начала в конец поезда. Установим сначала, что разность этих времен не зависит от скорости движения мяча u в системе отсчета поезда:

$$t_1(u, v) - t_2(u, v) \quad \text{не зависит от} \quad u. \tag{4.1}$$

Такой результат является очевидным в системе отсчета поезда, в которой эта разность просто тождественно равна нулю. Однако, поскольку мы не делаем никаких предположений относительно того, как связаны времена в разных системах отсчета, необходимо получить (4.1) непосредственно в v-системе.

Поскольку в (4.1) разность времен должна быть непрерывной функцией от u, достаточно установить, что она остается той же самой при двух значениях u и u', отношение которых равно отношению двух нечетных целых чисел [10]:

$$u = (2m + 1)\,u_0, \qquad u' = (2n + 1)\,u_0. \tag{4.2}$$

Пусть мячи начинают двигаться вместе от конца поезда. Так как u и u' — скорости в системе отсчета поезда, очевидно, что в этой системе отсчета в точности после $m+1/2$ полных циклов, совершаемых первым мячом, и $n+1/2$ циклов второго мяча оба мяча вместе окажутся в начале поезда, а после следующих $m+1/2$ циклов первого и $n+1/2$ циклов второго они вновь вместе достигнут конца поезда. Поскольку эти факты могут быть установлены просто путем подсчета числа поворотов и наблюдения присутствия двух мячей в одном и том же месте в то же самое время, они должны быть справедливы в любой системе отсчета. Следовательно, времена T_1 и T_1', за которые мячи совершают свои соответственно $m+1/2$ и $n+1/2$ циклов в v-системе, должны быть одинаковыми точно так же, как и соответствующие времена T_2 и T_2' для следующих $m+1/2$ и $n+1/2$ циклов. При этом, очевидно,

$$T_1 - T_2 = T_1' - T_2'. \tag{4.3}$$

Но T_1 — это время в v-системе, за которое совершается m замкнутых циклов и один пробег из конца в начало, тогда как за время T_2 совершается m замкнутых циклов и пробег из начала в конец. Поэтому время, за которое совершаются замкнутые циклы, выпадает из разности, и мы имеем

$$T_1 - T_2 = t_1(u, v) - t_2(u, v). \tag{4.4}$$

Таким же образом получаем

$$T_1' - T_2' = t_1(u', v) - t_2(u', v). \tag{4.5}$$

Учитывая (4.3) — (4.5), находим следующее равенство:

$$t_1(u, v) - t_2(u, v) = t_1(u', v) - t_2(u', v), \tag{4.6}$$

которое в точности соответствует утверждению (4.1).

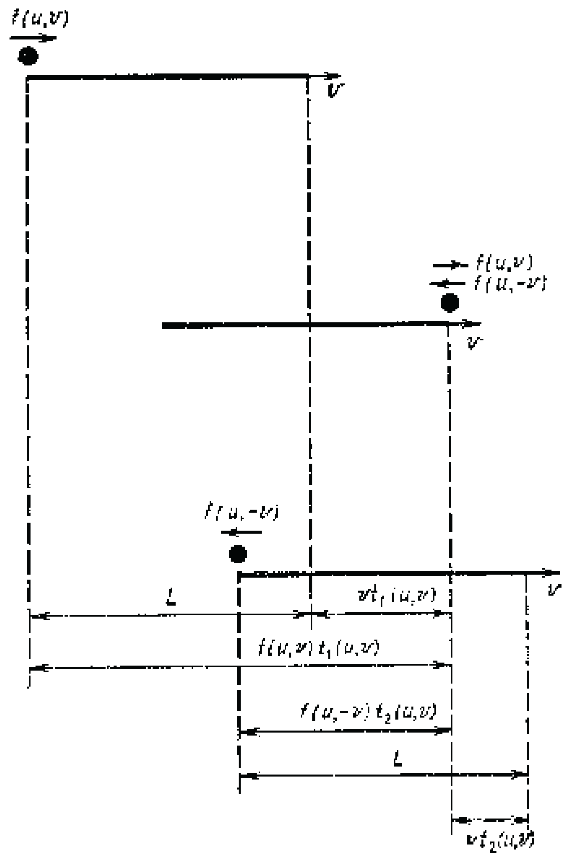

Рис. 3. «Мысленный» осциллятор, наблюдаемый в v-системе, относительно которой поезд движется вправо со скоростью v. Скорость мяча равна $f(u, v)$ при движении вправо и $f(u, -v)$ при движении влево. Длина поезда L. Между положениями, изображенными на верхней и средней картинках, прошло время $t_1(u, v)$; между средней и нижней картинками прошло время $t_2(u, v)$. Указаны различные расстояния, входящие в уравнения (4.7) и (4.8).

Выразим теперь разность времен (4.1) через функцию f, входящую в закон сложения. Заметим сначала, что в v-системе мяч движется из конца в начало поезда со скоростью $f(u, v)$, проходя за время $t_1(u, v)$ расстояние, равное сумме длины поезда L (в v-системе) и расстояния $vt_1(u, v)$, пройденного началом поезда за это время (рис. 3):

$$f(u, v)\, t_1(u, v) = L + v t_1(u, v). \tag{4.7}$$

Затем мяч движется от начала к концу со скоростью $f(u, -v)$, покрывая за время $t_2(u, v)$ расстояние, равное длине поезда L за вычетом расстояния $v t_2(u, v)$, на которое переместился конец поезда за это время:

$$f(u, -v)\, t_2(u, v) = L - v t_2(u, v). \tag{4.8}$$

Разрешая (4.7) и (4.8) относительно t_1 и t_2, получаем

$$t_1(u, v) - t_2(u, v) = \frac{L}{f(u, v) - v} - \frac{L}{f(u, -v) + v}, \tag{4.9}$$

но поскольку длина поезда L в v-системе не зависит от скорости мяча u в системе отсчета поезда, то из (4.9) и (4.1) следует, что

$$1/[f(u, v) - v] - 1/[f(u, -v) + v] = g(v), \tag{4.10}$$

где функция $g(v)$ не может зависеть от u.

Разделив выражение (4.10) на $2v$, получим

$$\frac{g(v)}{2v} = \frac{\{[f(u, -v) - f(u, v)]/2v\} + 1}{[f(u, v) - v]\,[f(u, -v) + v]}. \tag{4.11}$$

При $v \to 0$ левая часть этого выражения стремится к некоторому пределу K, и мы имеем

$$K = \frac{1 - [\partial f(u, v)/\partial v]\,|_{v=0}}{u^2}. \tag{4.12}$$

В итоге мы вновь приходим к выражению [ср. (2.20)]

$$\left. h'(u) = 1/(1 - Ku^2)\right|_{v=0} \tag{4.13}$$

V. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ БЕЗ УЧАСТИЯ СВЕТА

С учетом граничного условия (2.21) мы можем проинтегрировать (3.10) или (4.13), что даст

$$h(z) = \frac{1}{2\sqrt{K}} \ln\left(\frac{1 - \sqrt{K}z}{1 - \sqrt{K}z}\right), \qquad K \geqslant 0;$$

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{|K|}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{|K|}\, z\right), \qquad K \leqslant 0. \tag{5.1}$$

Подставляя любое из этих выражений в общую формулу закона сложения (2.19), получаем окончательно

$$w = (u + v)/(1 + Kuv). \tag{5.2}$$

Константа K не может быть отрицательна, поскольку в противном случае «сложение» двух положительных скоростей, каждая из которых больше $(-K)^{-1/2}$, привело бы к результирующей отрицательной скорости. Такие достаточно большие положительные скорости, которые приводят к столь неудовлетворительной ситуации, всегда могут быть достигнуты путем последовательных «сложений», поскольку при отрицательном K и положительных w, u и v значение w будет *превосходить* сумму скоростей u и v.

Однако если значение K неотрицательно, то из (5.2) следует, что $c(K) = K^{-1/2}$ является инвариантной скоростью: все, что движется с этой скоростью, будет двигаться с такой же скоростью и относительно любой другой системы отсчета. Галлилеевский случай является, несомненно, одним из возможных, поскольку при $K = 0$ имеем $w = u + v$ и $c(0) = \infty$. В историческом плане указания на то, что K не равно нулю, возникли в связи с растущим множеством подтверждений того факта, что скорость света в вакууме действительно является инвариантной скоростью.

Однако для идентификации величины K вовсе не обязательно прибегать к явлениям, распространяющимся с инвариантной скоростью. Необходимо лишь провести достаточно точные измерения скорости любого равномерно и прямолинейно движущегося объекта в двух различных системах отсчета. Если объект C движется вправо в системе B, которая в свою очередь движется вправо в другой системе A, то закон сложения

$$v_{CA} = (v_{CB} + v_{BA})/(1 + K v_{CB} v_{BA}) \tag{5.3}$$

позволяет выразить K через различные скорости, что записывается в виде

$$K = (1/v_{BA} v_{CA})\,[1 + x(1 - v_{CA}/v_{BA})], \tag{5.4}$$

где

$$x = v_{BA}/v_{CB} = -v_{AB}/v_{CB}. \tag{5.5}$$

За исключением величины x, соотношение (5.4) выражает K полностью через две скорости, измеренные в A-системе. Следовательно, для нахождения значения K наблюдатели в A-системе должны лишь измерить скорости v_{CA} и v_{BA} объекта C и B-системы и выяснить у своих помощников в B-системе то значение, которое обнаружено ими для безразмерного отношения x. Поскольку x не зависит от выбора системы единиц измерения длины и времени, нет даже необходимости во взаимной калибровке эталонов в A- и B-системе. Выражение (5.4) дает непосредственно обратный квадрат инвариантной скорости в тех единицах, которые выбраны в A-системе.

Наличие света не требуется также и при проведении надежных измерений скорости в любой системе отсчета. Например, наблюдатели в A и B могли бы измерить скорости друг друга и объекта C, реализовав соответствующим образом схему воображаемого состязания в беге, описанного в разд. II. При этом можно воспользоваться тем фактом, что в системе покоя беговой дорожки выражение (3.5), определяющее измеренную долю r через скорость s зайца и скорость u черепахи, принимает простой вид:

$$r = (s - u)/(s + u). \tag{5.6}$$

Поэтому наблюдатель A, устроив гонку между своим собственным зайцем («A-зайцем») и объектом C, смог бы измерить r и выразить скорость u объекта C через скорость s_A A-зайца. Аналогичным образом можно было бы определить скорость наблюдателя B и связанной с B-системой беговой дорожки в единицах s_A. С другой стороны, наблюдатель B мог бы выразить результаты своих аналогичных измерений через скорость s_B B-зайца. Поскольку x — безразмерная величина, нет даже необходимости заботиться о тождественности зайцев A и B в собственных системах отсчета.

Можно, наконец, вообще обойтись без наблюдателей A и B. Все, что на самом деле требуется, — это две совмещенные параллельные жесткие беговые дорожки, находящиеся в состоянии относительного равномерного и прямолинейного движения, причем с каждой из них связан свой собственный заяц, снабженный механизмом перемещения, обеспечивающим одинаковые условия как на части пути, соответствующей движению слева направо, так и на обратной

части пути. Подготовив все должным образом к началу старта и фиксируя относительные положения на каждой дорожке, где соответствующий ей заяц впервые после поворота встретится с C и с надлежащей частью другой дорожки, можно получить все, что необходимо для нахождения значения K. При этом не нужно прибегать ни к какой процедуре синхронизации часов и можно даже вообще обойтись без часов.

Показав, что действительно должна существовать инвариантная скорость, дальнейшее построение теории относительности можно проводить более общепринятыми методами. Однако, имея с самого начала в руках закон сложения, можно развивать теорию разными способами, в частности отказаться, если на то имеется желание, от услуг чего бы то ни было, что движется с инвариантной скоростью.

Тем не менее более интересной и поучительной является попытка усовершенствовать те стадии доказательства, которые я изложил выше. Например, можно спросить, каким должен быть простейший прибор, необходимый для извлечения информации относительно K из тех элементарных наблюдений, которые проводятся при воображаемом состязании в беге или при сравнении соизмеримых «мысленных» осцилляторов. Какие минимальные допущения о природе времени, пространства и скорости необходимо принять, чтобы указанная процедура имела смысл? На сколько слабым местом или, напротив, естественным является предположение о гладкости?

По крайней мере выяснение релятивистских взаимосвязей пространства, времени и скорости без использования световых сигналов весьма полезно с педагогической точки зрения. И без света можно прийти к ясности.

БЛАГОДАРНОСТИ

Представленная выше работа возникла благодаря переписке с Е. М. Парселлом, который заинтересовался, почему в статье [6] любое мое рассуждение не обходится без постулата о постоянстве скорости света, а затем терпеливо и в тактичной форме высказывал свои возражения против моих первоначально скептических доводов. Я весьма признателен ему, а также С. Папалиолиосу за многие замечания, которые учтены в данной статье, как я надеюсь, без

сколько-нибудь существенных искажений. Работа над этой статьей велась в стенах различных отелей и учреждений Скандинавии, и я очень благодарен фирме «Нордита», которая оплачивала мои счета. Моей признательности заслуживают М. Саломна, Г. Гримваль, А. Барани, Б. Лундквист и С. Петик, по первой просьбе предоставлявшие мне пишущую машинку. Наконец, я обязан Д. Гринбергеру за то, что он посоветовал мне обратиться к книге Терлецкого.

ЛИТЕРАТУРА И КОММЕНТАРИИ

1. *Einstein A.* — Ann. Phys., 1905, v. 17, p. 891.
2. Другая попытка построения теории относительности без участия света имеется в книге: *Терлецкий Я. П.* Парадоксы теории относительности. — М.: Наука, 1966, § 7. Терлецкий показывает, что общее линейное преобразование между двумя системами пространственно-временных координат должно иметь лоренцеву форму, в которой c^2 — неопределенная константа, если только обратное преобразование и произведение преобразований также имеют соответствующую структуру. (Это самостоятельное требование, не связанное с зависимостью массы от скорости, с которой начинаются и заканчиваются рассуждения Терлецкого.) Мой подход с концептуальной точки зрения является более простым (хотя аналитически он более трудоемок), поскольку, для того чтобы установить закон сложения скоростей, в нем не требуется сравнивать пространственные и временные измерения в различных системах отсчета; мои рассуждения основаны на мысленном эксперименте, в котором вовсе не участвуют часы.
3. Статья Эйнштейна [1] начинается с формулировки двух постулатов. Первый принцип относительности утверждает, что «dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Electrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen». («Не только механические, но и электродинамические явления не обладают свойствами, вытекающими из концепции абсолютного покоя».) Второй постулат гласит: «sich das Licht im leeren Raume stets einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Korpers unabhangigen Geschwindigkeit V fortpflanze". («Свет в пустом пространстве всегда распространяется с определенной скоростью с независимо от состояния движения излучающего тела».)
4. В данной статье я устанавливаю лишь факт существования скорости, инвариантной относительно систем отсчета, движущихся параллельно направлению этой скорости. Обобщение на два других измерения проводится с помощью несколько измененных, хотя и довольно утомительных обычных рассуждений, используемых для определения релятивистского поведения пространственных и временных измерений. Чтобы не отвлекать читателя от главного хода рассуждений и сохранить объем статьи в разумных пределах, мы опустили эти преобразования.
5. Можно возразить, что такие измерения неявно опираются на свет при проведении процедуры синхронизации часов, используемых для измерения скорости. Однако в разд. V описан метод определения величины K, в котором часы вообще не нужны. (Тем не менее следует подчеркнуть, что существуют методы синхронизации отдаленных часов, не связанные со светом. Например, их можно синхронизовать прямым сравнением в точке, лежащей посередине между позициями, которые должны будут занять эти часы, а затем симметрично перенести их в эти позиции.)
6. *Mermin N. David* — Amer. J. Phys. (в печати). Эта статья представляет собой расширенную версию домашнего задания 5 в книге: *Mermin N. David.* Space and Time in Special Relativity. — New York: McGraw-Hill, 1968, p. 230.
7. Уравнение (2.18) следует также непосредственно из (2.17) и граничного условия $f(x, 0)=x$.
8. В статье [6] заяц назван фотоном и его скорость c считается одной и той же во всех системах отсчета. Здесь нет никаких специальных предположений относительно скорости зайца s.
9. На этом этапе аргументы, приведенные в [6], фактически исчерпаны. Необходимо лишь заметить, что при $v=0$ (3.7) приводит к тому, что выражение (3.5) для r принимает вид $r=(s-u)/(s+u)$. Однако если $s=s_1=s_2=c$, то приравняв два выражения для r, придем к уравнению с одним оставшимся неизвестным w, решением которого я является релятивистский закон сложения. Однако здесь s_1 и s_2 связаны с s самим законом сложения, вид которого мы ищем, и поэтому мы приходим не к закону сложения, а к нелинейному уравнению, которому он должен удовлетворять. Для решения этого уравнения требуется дальнейший анализ.
10. Эти два мяча можно рассматривать как зайца и черепаху из разд. III, имеющих теперь соизмеримые скорости, причем «гонка» должна продолжаться теперь до тех пор, пока объекты не встретятся в исходной стартовой позиции.

(Перевод В. С. Потапова)